

Table des matières

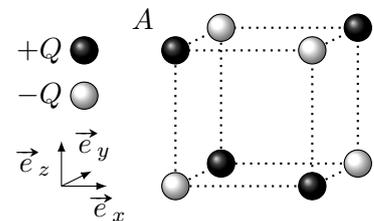
1 Champs et potentiels de charges ponctuelles	1
2 Théorème de Gauss	2
3 Sources du champ électromagnétique	4
4 Champs gravitationnels	4
5 Loi de Poisson	5
6 Théorème d'Ampère	5
7 Dipôles magnétostatiques	7
8 Pour aller plus loin...	8

1 Champs et potentiels de charges ponctuelles

Exercice 1 - Calcul d'une force électrostatique :

Des charges sont disposées sur les huit sommets d'un cube de côté a , de manière à ce que deux charges occupant des sommets voisins soient de signe opposé (voir schéma).

Calculer la force s'exerçant sur la charge notée A et commenter.



Exercice 2 - Cartes de champ et de potentiel : Tracer qualitativement les lignes de champ et les équipotentielles des deux distributions de charge suivantes :

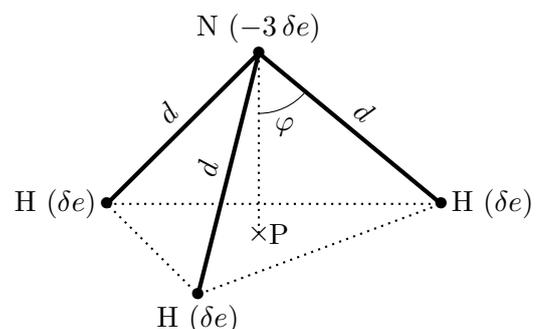
1. Deux charges ponctuelles $+q$ et $-q$, séparées d'une distance a . Commenter en particulier les allures près et loin des deux charges.
2. Deux charges q séparées d'une distance a . Commenter de même l'allure à faible et grande distance de la distribution.

Exercice 3 - Moment dipolaire de l'ammoniac :

La molécule d'ammoniac NH_3 forme une pyramide à base triangulaire et possède donc un moment dipolaire de norme $\mu = 1.47 \text{ D}$. On donne $\varphi = 68^\circ$ et $d = 101 \text{ pm}$. P est le projeté orthogonal de N sur le plan formé par les trois hydrogènes.

Déterminer le pourcentage de ionicité de la liaison N-H.

Donnée : $1 \text{ D} = 3.33 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$.



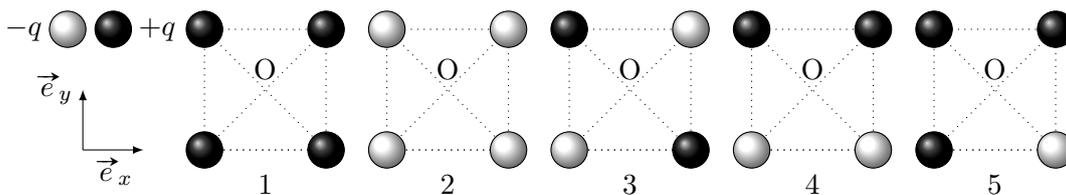
Exercice 4 - Un exemple de quadrupole : On considère 3 charges ponctuelles alignées sur l'axe (Ox) : une charge négative $-2q$ placée à l'origine O et deux charges positives q placées en A_1 d'abscisse $x = +d$ et A_2 d'abscisse $x = -d$. Soit P un point repéré par sa distance r à O et par l'angle θ entre \vec{OP} et l'axe (Ox) .

1. Calculer le potentiel crée en P par cette distribution. de charges, dans le cas général et dans le cas où $r \gg d$.
2. Commenter.

Exercice 5 - Système $-q, kq$; équipotentielle $V = 0$: Une charge ponctuelle $q_1 > 0$ est placée dans le vide sur un axe $x'Ox$ au point O et une charge ponctuelle $q_2 < 0$ est placée sur ce même axe au point P d'abscisse $D > 0$. On pose $q_2 = -q$ et $q_1 = +kq$ avec $k > 1$, et $q > 0$.

1. Donner l'expression de $V(M)$, potentiel en un point quelconque de l'espace situé à r_1 de O et r_2 de P .
2. Préciser la relation existante entre r_1 et r_2 sur la surface équipotentielle $V = 0$.
3. Cette relation définit une sphère de rayon R centrée au point C de l'axe Ox d'abscisse $D + d$ avec $d \geq 0$. En utilisant les coordonnées cartésiennes, déterminer R et d en fonction de D et k .

Exercice 6 - Étude de distributions de charge ponctuelles : On considère les configurations de charges suivantes. La diagonale du carré vaut $2a$ et on supposera que le potentiel à l'infini est nul.



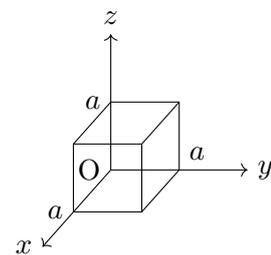
1. Calculer le champ et le potentiel au centre du carré pour chaque configuration.
2. Quelle est l'énergie électrostatique totale contenue dans la distribution de charge? En déduire la configuration la plus stable.
3. On reprend la configuration numéro 3 ci-dessus. Calculer le potentiel en un point M de coordonnées (x, y) proche de l'origine O . Commenter.

<p>Éléments de réponse :</p> <p>1 - $\vec{F} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \right] \cdot (\vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z)$.</p> <p>3 - $\delta = 27\%$.</p> <p>4 - 1. $\frac{qa^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3\cos^2\theta - 1]$.</p>	<p>5 - 2. $r_1 = kr_2$; 3. $D + d = \frac{k^2 D}{k^2 - 1}$, $R = \frac{kD}{k^2 - 1}$.</p> <p>6 - 1. Potentiel : $\frac{q}{\pi\epsilon_0 a}$; $-\frac{q}{\pi\epsilon_0 a}$; 0; 0; $\frac{q}{2\pi\epsilon_0 a}$; Champ : $\vec{0}$; $\vec{0}$; $\vec{0}$;</p>	<p>$-\frac{q\sqrt{2}}{2\pi\epsilon_0 a^2} \vec{e}_y$; $\frac{q\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0 a^2} (\vec{e}_x - \vec{e}_y)$; 2. Énergie : $\frac{q^2}{\pi\epsilon_0 a} (1 + 2\sqrt{2})$; idem; $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} (1 - 2\sqrt{2})$ (la plus stable); $-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$; 0; 3. $V(M) \simeq -\frac{6q}{4\pi\epsilon_0 a^3} xy$.</p>
--	--	--

2 Théorème de Gauss

Exercice 7 - Calculs de flux : Dans la région de l'espace considérée règne un champ électrostatique $\vec{E}(M) = Cx\vec{e}_x$. Soit un cube de coté a représenté sur la figure ci-contre.

1. Calculer le flux sortant du cube du champ électrostatique en appliquant la définition du flux.
2. Retrouver ce résultat à l'aide du théorème de Green-Ostrogradski.
3. En déduire la charge totale dans le cube.
4. Même question pour $\vec{E}(M) = Dx^2\vec{e}_x$.
5. Même question pour $\vec{E}(M) = F(y\vec{e}_x + x\vec{e}_y)$.



Exercice 8 - Symétries et invariances : Pour chacune des distributions de charges ci-dessus, indiquer s'il existe des plans de symétries et des invariances et en déduire la forme du champ \vec{E} . Si celles-ci sont suffisantes, proposer une surface de Gauss adaptée.

1. Un système composé de deux cylindres identiques de direction \vec{e}_z infinis de densité volumique de charge $+\rho$ dont les centres sont placés en $x = -a$ et $x = +a$.
2. Un tore (c'est-à-dire « un donut ») uniformément chargé en volume.
3. Une distribution de charge uniforme pour l'espace $x > 0$ et vide pour $x < 0$.

Exercice 9 - Calculs de champs et de potentiels électriques : Calculer le champ électrique produit dans tout l'espace par les distributions suivantes :

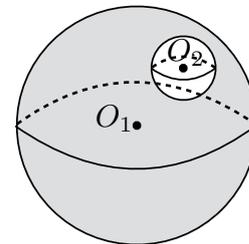
1. Une couche infinie d'épaisseur e , chargée uniformément en volume de densité volumique de charge ρ . À partir de l'expression du champ et en comparant avec le champ du plan infini, en déduire une expression de la densité surfacique de charge. Calculer le potentiel électrostatique correspondant.
2. Une coquille sphérique d'épaisseur d uniformément chargée ρ en volume, située à la distance moyenne R d'un point O . On proposera deux méthodes différentes. L'expression de la divergence en coordonnées sphériques pour un champ à symétrie sphérique est $\text{div}(f(r)\vec{e}_r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 f(r))$.
3. Deux plaques infinies juxtaposées, d'épaisseurs d_1 et d_2 , définies par des distributions volumiques homogènes de charges $\rho_1 > 0$ et $\rho_2 < 0$ telles que $\rho_1 d_1 + \rho_2 d_2 = 0$.

Exercice 10 - Calculs de capacités : Calculer la capacité entre les deux armatures, l'une de charge $+Q$ constante et l'autre $-Q$, dans les deux cas ci-dessous :

1. La capacité d'un condensateur formé par deux cylindres coaxiaux minces de hauteur H , de rayons R_1 et R_2 avec $R_2 > R_1$. On suppose que les rayons sont négligeables devant H , ce qui implique que l'on suppose les cylindres infinis.
2. Un condensateur formé par deux sphères concentriques minces, de rayons R_1 et R_2 avec $R_2 > R_1$.

Exercice 11 - Champ dans une cavité sphérique :

Une boule de rayon a et de centre O_1 est uniformément chargée avec une densité volumique de charges $\rho_0 > 0$, mis à part une cavité sphérique, entièrement incluse dans la boule, centrée en O_2 , de rayon b vide de charges. On cherche le champ électrique en un point M à l'intérieur de la cavité.



Calculer le champ électrique en M situé à l'intérieur de la cavité.

Exercice 12 - Champ et potentiel créés par deux fils infinis : On considère un fil infini d'axe Oz portant une densité linéique de charges constante λ .

1. Déterminer le champ électrostatique \vec{E} .
2. En déduire le potentiel électrostatique V .
3. On considère deux fils infinis parallèles à l'axe Oz situés en $(x = -a, y = 0)$ et $(x = a, y = 0)$ portant respectivement des densités linéiques de charges $-\lambda$ et $+\lambda$. Donner l'expression du potentiel en un point de l'espace défini par les distances r_1 et r_2 aux deux fils, en choisissant $V = 0$ à égale distance des deux fils.

Exercice 13 - Charge au centre d'un cube : Soit une charge ponctuelle.

1. Quelle est le flux du champ électrique au travers d'une sphère de rayon r centrée sur la charge ?
On considère une charge ponctuelle q placée au centre d'un cube de côté a .
2. Déduire de la question précédente en utilisant les symétries du champs le flux du champ électrique à travers une face du cube.
3. Même question si la charge est maintenant placée en un sommet du cube. On pourra essayer de se ramener à la situation précédente.

Éléments de réponse :
7 - 1. Ca^3 ; 3. $Q = \epsilon_0 Ca^3$; 4. $\Phi = Da^4$ et $Q = \epsilon_0 Da^4$. 5. 0
8 - 1. $\vec{E} = E_x(x, y)\vec{e}_x + E_y(x, y)\vec{e}_y$;
 2. $\vec{E} = E_r(r, z)\vec{e}_r + E_z(r, z)\vec{e}_z$; 3. $\vec{E} = E(x)\vec{e}_x$, un cylindre.
9 - 1. $\vec{E} = \pm \frac{\rho e}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$ pour $|z| > e/2$, $\frac{\rho z}{\epsilon_0} \vec{e}_z$ pour $|z| \leq e/2$, $V = \mp \frac{\rho e z}{2\epsilon_0}$ pour $|z| > e/2$, $-\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0}$ pour $|z| \leq$

$e/2$, $\sigma = \lim_{e \rightarrow 0} \rho e$; 2. $\vec{E} = \vec{0}$ pour $r < R - d/2$, $\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[r - \frac{(R - d/2)^3}{r^2} \right] \vec{e}_r$ pour $R + d/2 > r > R - d/2$, $\frac{\rho}{3\epsilon_0 r^2} [(R + d/2)^3 - (R - d/2)^3] \vec{e}_r$ pour $r > R + d/2$; 3. $\vec{E} = \frac{\rho_1(2x + d_1) + \rho_2 d_2}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$ dans la plaque 1, $\frac{\rho_1 d_1 + \rho_2(2x - d_2)}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$ dans la seconde, $\vec{0}$ à l'extérieur.

10 - 1. $C = \frac{2\pi\epsilon_0 H}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$; 2. $C = 4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 / (R_2 - R_1)$.
11 - $\vec{E} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \vec{O_1 O_2}$.
12 - 1. $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$; 3. $V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r_2}$.
13 - 2. $\frac{q}{6\epsilon_0}$; 3. $\frac{q}{24\epsilon_0}$.

3 Sources du champ électromagnétique

Exercice 14 - Modèle de conduction électrique dans un matériau : Pour modéliser la conduction électrique dans un matériau, on considère un conducteur cylindrique de section S et de longueur L , dont les deux extrémités sont soumises à une différence de potentiel U . Un champ électrique uniforme, de norme E et dirigé dans le sens de l'axe (Ox) orthogonal à la section S , règne dans le volume du conducteur. Celui-ci contient une densité volumique de ρ d'électrons libres, de masse m et de charge $-e$, assurant la conduction électrique. On modélise les chocs entre les atomes du réseau atomique et les électrons libres par une force de frottement fluide linéaire $\vec{f} = -\alpha_f \vec{v}$.

1. Montrer que les électrons atteignent une vitesse limite \vec{v}_∞ .
2. On suppose que la vitesse initiale des électrons est nulle. Donner la loi horaire de la vitesse $v(t)$ d'un électron et en donner la durée τ caractéristique.
3. En réalisant un calcul de flux d'électrons, exprimer le nombre δn d'électrons traversant la section S du conducteur pendant une durée dt . On suppose que tous les électrons du conducteur ont atteint la vitesse limite \vec{v}_∞ . En déduire l'expression de la valeur absolue de l'intensité électrique dans ce conducteur.
4. Montrer qu'une relation de proportionnalité unit la tension U aux bornes du conducteur à l'intensité qui la traverse. Définir sa résistance et commenter l'influence des paramètres géométrique L et S .
5. Pour le cuivre, on mesure une densité volumique d'électrons libres $\rho_{\text{cuivre}} = 8.49 \times 10^{28}$ électrons \cdot m $^{-3}$. De plus, on définit sa résistivité comme $r = RS/L$ avec R la résistance du fil, qui vaut $r_{\text{cuivre}} = 1.68 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$. En déduire la constante de temps τ . Jusqu'à quelle fréquence est-il raisonnable de considérer que les électrons libres sont en permanence à la vitesse limite?

Données : $m_{\text{électron}} = 9.11 \times 10^{-31}$ kg ; $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C

Exercice 15 - Décharge d'un condensateur dans l'air : On constate expérimentalement qu'une boule conductrice de rayon R , uniformément chargée et abandonnée dans l'air avec une charge q_0 se décharge. Pour interpréter ce phénomène, on suppose que l'air est un milieu faiblement conducteur de conductivité σ : la densité de charge ρ est nulle et la densité de courant \vec{j} est fournie par la loi d'Ohm locale. L'origine de l'espace étant prise au centre O de la boule, on adopte les coordonnées sphériques de centre O et on suppose le champ magnétique nul.

1. Déterminer le champ électrique en tout point de l'espace.
2. Donner l'expression de la densité de courant dans l'air.
3. Déterminer $q(t)$ en fonction de q_0 , σ , ε_0 et t .
4. Pourquoi les expériences d'électrostatique sont-elles plus difficiles à réaliser lorsque l'air est humide ?

Éléments de réponse :

14 - 1. $\vec{v}_\infty = -\frac{eE}{\alpha_f} \vec{e}_x$; 2. $\vec{v}(t) = \vec{v}_\infty (1 - \exp(-t/\tau))$ avec $\tau = m/\alpha_f$; 3. $|I| = e\rho S v_\infty$; 4. $U = V(0) - V(L) = EL$ donc $I = \frac{e^2 \rho S}{L \alpha_f} U$; 5. $\tau = 2.48 \times 10^{-14}$ s.

15 - 3. $q(t) = q_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ avec $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$.

4 Champs gravitationnels

Exercice 16 - Pression au centre de la Terre : On modélise la Terre par une sphère homogène de masse volumique constante μ , de rayon R_T et de masse totale M_T .

1. En admettant la relation de la statique des fluides $\frac{dP}{dr} \vec{e}_r = \mu \vec{G}(r)$ avec \vec{G} le champ de pesanteur terrestre, montrer que la pression vérifie la loi $\frac{dP}{dr} = -\alpha r$. Donner l'expression de la constante α .
2. Quelle est la pression au centre de la Terre en fonction de R_T , M_T et de la constante de gravitation universelle \mathcal{G} ? La valeur communément admise de cette pression est 380 GPa, commenter. On donne $\mathcal{G} \approx 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$, $R_T \approx 6400$ km et $M_T \approx 6 \times 10^{24}$ kg.

Exercice 17 - Champ gravitationnel terrestre : On représente la distribution de masse à l'intérieur de la Terre par une masse volumique variant en fonction de la distance r au centre de la Terre (de rayon R_T) selon la loi $\mu(r) = \mu_0 \left(1 - \alpha \frac{r^2}{R_T^2}\right)$.

1. Déterminer l'expression du champ gravitationnel $\vec{G}(\vec{r})$ en un point interne de la Terre situé en \vec{r} .

2. Vérifier la relation locale de Gauss pour la gravitation. L'expression de la divergence en coordonnées sphériques pour un champ à symétrie sphérique est $\operatorname{div}(f(r)\vec{e}_r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 f(r))$.

Éléments de réponse : $\left| \begin{array}{l} \mathbf{16} - 1. \vec{G}(r) = -\frac{4\pi\mu\mathcal{G}}{3} r\vec{e}_r; 2. 2 \times 10^{11} \text{ Pa} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \mathbf{17} - 1. \vec{G}(\vec{r}) = -4\pi\mathcal{G}\mu_0 \frac{r}{3} \left(1 - \alpha \frac{3r^2}{5R_T^2}\right) \vec{e}_r. \end{array} \right|$

5 Loi de Poisson

Exercice 18 - Potentiel électrostatique d'un électrolyte : On considère un électrolyte globalement neutre comportant des charges positives $+q$ et négatives $-q$. Dans une hypothèse d'équilibre thermodynamique local, la densité de charges positives ρ_+ et négatives ρ_- à la température T dans un électrolyte suit une loi de Boltzmann, ce qui conduit à une densité de charge totale :

$$\rho(M) = \rho_0 \exp\left(-\frac{qV(M)}{k_B T}\right) - \rho_0 \exp\left(+\frac{qV(M)}{k_B T}\right),$$

où $\rho_0 = qn_0$ avec n_0 la densité moyenne de particules, et $V(M)$ le potentiel électrostatique au point M .

On suppose que la répartition de charges est à symétrie sphérique.

- Donner l'équation vérifiée par le potentiel électrostatique. On rappelle l'expression du Laplacien en coordonnées sphériques $\Delta f(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df(r)}{dr} \right)$.
- Dans une hypothèse où la température est élevée : $qV \ll k_B T$ dans tout l'électrolyte, vérifier que le potentiel $V(r) = \frac{\alpha}{r} \exp\left[-\frac{r}{r_0}\right]$ est solution de l'équation précédemment trouvée. Donner l'expression de r_0 et commenter la forme du potentiel obtenue.

Éléments de réponse : $\left| \begin{array}{l} \mathbf{18} - 1. \frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} = \frac{2\rho_0}{\varepsilon_0} \sinh[qV/k_B T]; \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} 2. r_0 = \frac{\varepsilon_0 k_B T}{2\rho_0 q^2}. \end{array} \right|$

6 Théorème d'Ampère

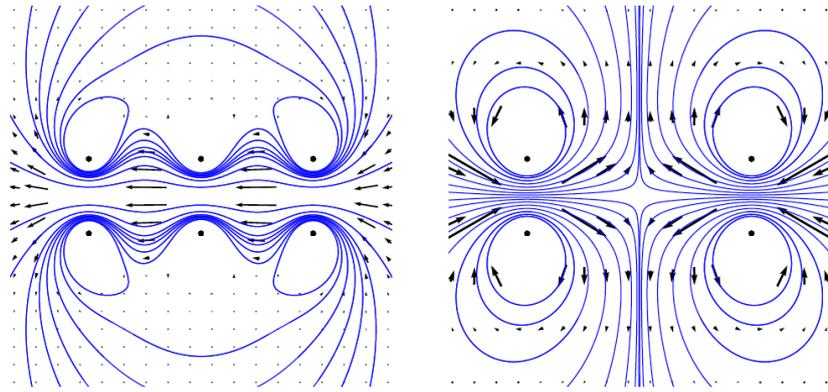
Exercice 19 - Calculs de circulations de champs de vecteurs :

- Soit un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_x$.
 - Dessiner la situation puis calculer sa circulation sur un contour rectangulaire orienté construit par le vecteur $3\ell\vec{e}_x$ puis par le vecteur $2\ell\vec{e}_y$.
 - Dessiner la situation puis calculer sa circulation sur un contour circulaire de centre O, de rayon R et orienté par \vec{e}_θ .
- Soit une force \vec{F} conservative dérivant de l'énergie potentielle \mathcal{E}_p .
 - Donner l'expression du travail de cette force entre deux points A et B quelconques.
 - Justifier que la circulation d'une force conservative sur un contour fermé est toujours nulle.
 - Justifier que la circulation du champ magnétique de la question précédente sera toujours nulle quel que soit le contour fermé choisi.
- Soit la force $\vec{F} = k_1 r \theta \vec{e}_\theta$.
 - Montrer que cette force n'est pas conservative.
 - Dessiner la situation puis calculer sa circulation sur un contour circulaire de centre O, de rayon R et orienté par \vec{e}_θ .
- Soit la force $\vec{F} = k_0(x\vec{e}_y - y\vec{e}_x)$.
 - Montrer que cette force n'est pas conservative.
 - Dessiner la situation puis calculer sa circulation sur un contour rectangulaire orienté construit par le vecteur $3\ell\vec{e}_x$ puis par le vecteur $2\ell\vec{e}_y$.

Exercice 20 - Cartes de champ :

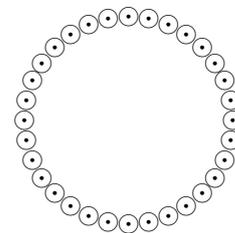
On considère les deux cartes de champs magnétiques ci-contre produites à l'aide de plusieurs spires.

1. Où sont placées les sources de courant.
2. Dans quel sens circule le courant pour chacune des sources.



Exercice 21 - Invariances et symétries : Pour chacune des distributions de courants ci-dessous, indiquer s'il existe des plans de symétries et des invariances et en déduire la forme du champ \vec{B} . Si celles-ci sont suffisantes, proposer un contour d'Ampère adapté.

1. Deux fils infinis parallèles et parcourus par un courant I identique.
2. Une bobine torique.
3. Une distribution de N fils parcourus par des courants I identiques disposés sur un cylindre.

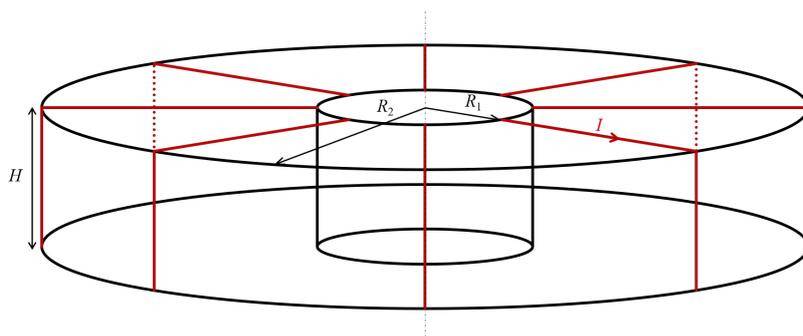


Exercice 22 - Deux calculs de champs classiques :

1. Calculer le champ magnétique produit dans un cylindre infini de section $S = \pi R^2$ parcouru par une densité de courant uniforme parallèle au cylindre $\vec{j} = j\vec{u}_z$ en utilisant le théorème d'Ampère.
2. On considère une plaque épaisse infinie, de distribution de courant constituée d'une densité de courant uniforme $\vec{j} = j\vec{u}_y$, comprise entre les plans $z = -e/2$ et $z = +e/2$. En utilisant une symétrie particulière, donner la valeur du champ sur le plan $z = 0$ puis calculer le champ magnétique dans tout l'espace en utilisant le théorème d'Ampère.
3. Retrouver en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère statique les deux résultats précédents. On donne l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\text{rot } \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z .$$

Exercice 23 - Bobine torique : On considère une bobine torique, c'est-à-dire un enroulement de spires autour d'un tore à base carré de rayon intérieur R_1 , de rayon extérieur R_2 et de hauteur H . Le schéma ci-dessous illustre le système mais seules quelques spires ont été tracées pour éviter de surcharger le dessin mais il y a suffisamment de spires pour considérer qu'on a un continuum de spires. Toutes les spires sont parcourues par le même courant I et il y en a N .



1. Par analyse des symétries et des invariances déterminer la forme du champ magnétique.
2. Considérer des cercles centrés sur l'axe de révolution du tore et de rayon r . Sachant que la circulation du champ magnétique sur ce cercle est égal au produit de la perméabilité du vide μ_0 par le courant électrique enlacé (compté algébriquement), déterminer l'expression du champ magnétique partout dans l'espace. On prendra l'origine des z au milieu du tore.
3. On définit le coefficient d'auto-induction L par l'expression $\Phi = LI$ avec Φ le flux du champ magnétique traversant l'ensemble des spires. Déterminer l'expression du coefficient L .

Exercice 24 - Cylindre infini en rotation autour de son axe : Un long cylindre, supposé infini, de rayon R et chargé uniformément en volume avec la densité ρ , tourne à vitesse angulaire ω constante autour de son axe (Oz) relativement au référentiel du laboratoire. Le milieu a des propriétés identiques à celles du vide, et on suppose qu'il n'y a pas de charge surfacique.

1. Calculer la distribution de courants ainsi générée.
2. Calculer alors le champ magnétique, en admettant que le champ extérieur est nul.

<p>Éléments de réponse :</p> <p>19 - 1. 0; 2. $W_{A \rightarrow B} = \mathcal{E}_p(A) - \mathcal{E}(B)$, $C = W_{A \rightarrow A} = 0$; 3. $C = 2\pi^2 k_1 R^2$; 4. $C = 12k_0 \ell^2$.</p> <p>21 - 1. $\vec{B} = B_x(x, y)\vec{e}_x + B_y(x, y)\vec{e}_y$; 2. $\vec{B} = B(r, z)\vec{e}_\theta$, contour circulaire; 3.</p>	<p>$\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$, contour circulaire.</p> <p>22 - 1. $\vec{B}(z) = \mu_0 \frac{j_e}{2} \vec{u}_x$ si $z > e/2$; $\vec{B}(z) = \mu_0 j z \vec{u}_x$ si $z < e/2$; 2. Si $r > R$, $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 S j}{2\pi r} \vec{e}_\theta$, si $r < R$, $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 r j}{2} \vec{e}_\theta$.</p>	<p>23 - 2. Nul à l'extérieur et $\vec{B}(r, z) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$ à l'intérieur; 3. $L = \frac{\mu_0 N^2 H}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$.</p> <p>24 - 1. $\vec{j}(M) = \rho r \omega \vec{e}_\theta$; 2. $\vec{B}(r < R) = \mu_0 \rho \omega \frac{R^2 - r^2}{2} \vec{e}_z$.</p>
---	---	---

7 Dipôles magnétostatiques

Exercice 25 - Moment dipolaire magnétique terrestre : La Terre de centre O et de rayon R_T , d'axe polaire (O, \vec{e}_z) orienté du pôle Nord vers le pôle Sud, est supposée contenir en son centre un dipôle magnétique de moment dipolaire : $\vec{m} = m \vec{e}_z$. On repère un point M du globe terrestre par $r = R_T = 6371$ km, θ fixé, et φ quelconque. On donne, dans le cadre de l'approximation dipolaire, les composantes du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé en M par le dipôle :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3} \vec{e}_\theta .$$

1. Exprimer la latitude λ comptée depuis l'équateur (positivement dans l'hémisphère nord, et négativement dans l'hémisphère sud), en fonction de θ .
À Paris ($\lambda = 49^\circ$), le champ magnétique terrestre \vec{B}_T est vers le sol : il fait un angle $I = -65^\circ$ avec l'horizontale et sa composante horizontale est $B_h = 20 \mu\text{T}$.
2. Exprimer la composante verticale B_v du champ magnétique terrestre puis norme B_T du champ magnétique terrestre.
3. Déduire la valeur du moment dipolaire magnétique terrestre m .

Exercice 26 - Interaction de deux dipôles magnétiques à distance constante : On étudie deux dipôles magnétiques de moments dipolaires respectifs \vec{m}_1 et \vec{m}_2 . Le premier est fixe en O , centre d'un repère sphérique d'axe polaire ($0, \vec{e}_z$), parallèle à son moment dipolaire : $\vec{m}_1 = m_1 \vec{e}_z$. Le second dipole est placé en $r = \text{cte}$, θ fixé, et $\varphi = 0$. On repère son moment dipolaire par l'angle $\alpha = (\vec{e}_z, \vec{m}_2)$ qui peut varier. On suppose de plus que \vec{m}_2 est dans le plan ($O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta$). On donne, dans le cadre de l'approximation dipolaire, les composantes du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé en M par le dipôle :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3} \vec{e}_\theta .$$

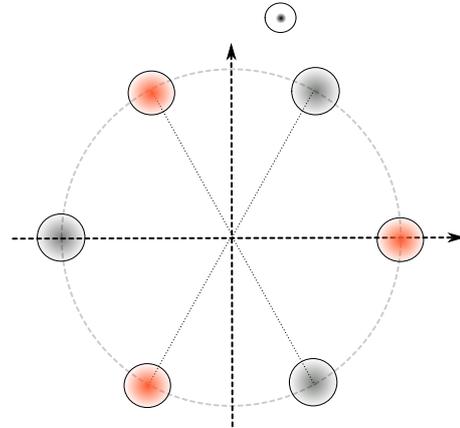
1. Exprimer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(\alpha)$ d'interaction du second dipôle avec le champ magnétique créé par le premier dipôle.
2. Que doit vérifier $\tan(\theta - \alpha)$ à l'équilibre?
3. Application : que vaut α si l'équilibre est stable et $\theta = 0$? $\pi/2$? π ? Justifier ce du point de vue des lignes de champs.

<p>Éléments de réponse :</p> <p>25 - 1. $\lambda = \theta - \frac{\pi}{2}$; 2. $B_v = 43 \mu\text{T}$ et</p>	<p>$B_T = 47 \mu\text{T}$; 3. $79 \times 10^{21} \text{ A} \cdot \text{m}^2$.</p> <p>26 - 1. $-\frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi} (2 \cos \theta \cos(\theta - \alpha) -$</p>	<p>$\sin \theta \sin(\theta - \alpha))$; 2. $2 \tan(\theta - \alpha) = \tan \theta$;</p> <p>3. $\alpha = 0$ dans les 3 cas.</p>
--	--	--

8 Pour aller plus loin...

Exercice 27 - Piège hexapolaire :

On considère la configuration ci-dessous, où 6 fils infinis, disposés parallèlement à l'axe (Oz), sont placés en des points équidistants le long d'un cercle de rayon a , comme dans le schéma ci-dessous. 3 fils ont une densité linéique de charge $+\lambda$, 3 autres une densité linéique de charge $-\lambda$, comme indiqué sur le schéma. On cherche à connaître le potentiel au voisinage du centre O . Dans cet exercice, on notera i l'unité imaginaire.



1. Quelles sont les symétries auxquelles obéissent le champ électrique et le potentiel dans ce problème ?
2. Rappeler l'expression du potentiel généré par un fil infini dans tout l'espace.
3. En choisissant le potentiel nul sur l'axe central, montrer que le potentiel en un point P quelconque s'écrit

$$V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{PA_2 \cdot PA_4 \cdot PA_6}{PA_1 \cdot PA_3 \cdot PA_5} \right)$$

4. En écrivant les coordonnées du point P sous forme complexe $z = re^{i\theta}$, montrer

$$\frac{PA_2 \cdot PA_4 \cdot PA_6}{PA_1 \cdot PA_3 \cdot PA_5} = \left| \frac{a^3 + z^3}{a^3 - z^3} \right|.$$

5. Enfin, montrer qu'au voisinage de l'axe central, on trouve

$$V(r, \theta) \simeq \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \left(\frac{r}{a} \right)^3 \cos 3\theta.$$

Commenter.

Exercice 28 - Étude électrostatique de l'atome d'hydrogène : La fonction d'onde du niveau fondamental électronique de l'atome d'hydrogène s'écrit $\psi(r) = \mathcal{N} \exp(-r/a_0)$. Le rayon de Bohr $a_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R_y}$, avec $R_y = 13.6 \text{ eV}$ l'énergie de Rydberg est l'échelle typique de décroissance de l'amplitude de probabilité.

1. Comment calcule-t-on le préfacteur \mathcal{N} ? Que représente physiquement la quantité a_0 ?
2. En considérant le noyau (de charge $+e$) comme étant localisé en $r = 0$, trouver à l'aide du théorème de Gauss le champ électrostatique créé dans tout l'espace par l'atome d'hydrogène.
3. Quel est le résultat attendu lorsque la distance au noyau devient grande devant le rayon de Bohr ?

Exercice 29 - Modèle classique du spin de l'électron : Une modélisation simpliste du « spin » de l'électron est donnée par une sphère, de centre O et de rayon R , portant une charge volumique ρ homogène, qui tourne autour de l'un de ses diamètres (Oz) à la vitesse angulaire uniforme ω .

1. Exprimer le courant dI créé par la spire circulaire virtuelle repérée par la distance r (à dr près) à O et par l'angle θ (à $d\theta$ près) par rapport à (Oz).
2. Quel est le moment dipolaire magnétique élémentaire $d\vec{m}$ associé à cette spire, en fonction de ρ , ω , r et θ ?
3. En déduire le moment dipolaire magnétique total \vec{m} de l'électron en fonction de e (la charge de l'électron), R et ω .

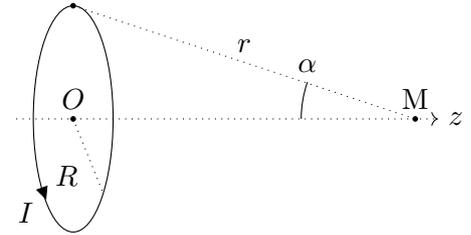
On admet que la valeur du moment dipolaire magnétique est celui du magnéton de Bohr $m = \mu_B = 9.27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ et que le rayon de la sphère doit être $R = 2.8 \text{ fm}$.

4. Que vaut la vitesse angulaire ω ?
5. En déduire la vitesse maximale v_{\max} d'un point de la sphère. Que faut-il conclure d'un tel résultat ?

Exercice 30 - De la spire à la bobine :

On considère une spire circulaire de rayon R , parcourue par un courant I et d'axe de révolution Oz comme sur la figure ci-contre. On admettra que le champ magnétique créé par la spire au point M situé sur l'axe Oz s'écrit

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$$



où α est l'angle sous lequel le point M voit la spire.

1. À partir des symétries et des invariances, retrouver les dépendances et la direction du champ magnétique sur l'axe.
2. Quelle est l'expression du champ magnétique en fonction de z ?
3. Tracer la courbe $B(z)$. Commenter. Où le champ est maximal ? On pourra prendre comme valeurs : $I = 1 \text{ A}$, $R = 5 \text{ cm}$.
4. Un point N , voisin de M mais en dehors de l'axe, se trouve à la même côté z mais à une distance r faible de l'axe avec $r \ll R$. Refaire l'étude des symétries et des invariances pour ce point N .
5. À partir de la conservation du flux du champ magnétique à travers un petit cylindre centré sur M et passant par N , déterminer la composante radiale B_r du champ en N .
6. Commenter le signe trouvé dans l'expression de $B_r(N)$.
On considère maintenant une bobine de longueur L , comprenant N spires, parcourues par un courant I . On considère toujours un point M sur l'axe de révolution de la bobine.
7. À partir des invariances et des symétries, exprimer la direction et les dépendances du champ magnétique créé sur l'axe de révolution de la bobine.
8. Déduire de l'expression du champ magnétique d'une spire, le champ magnétique créé par la bobine sur son axe. On pourra introduire le nombre de spires par de longueur $n = N/L$.
9. Tracer le champ magnétique en fonction de l'abscisse z pour $L = R$ et $L = 10R$. On prendra $z = 0$ au centre de la bobine. On pourra prendre 100 spires quelque soit la longueur de la bobine.
10. Retrouver le champ magnétique créé par un solénoïde infiniment long. En déduire que le champ magnétique en dehors de la bobine infinie est rigoureusement nul.

Exercice 31 - Expérience de Stern & Gerlach : Le but de cette expérience est de montrer l'existence d'un moment magnétique atomique et de sa quantification. Dans cette expérience, Stern & Gerlach ont utilisé des atomes d'argent car toutes les couches électroniques sont pleines sauf la sous-couche 5s qui contient un électron. Comme les couches (et sous-couches) pleines ont un moment magnétique nul, le moment magnétique ne peut provenir que de l'électron 5s. Si il y a moment magnétique propre associé à l'électron 5s, on doit observer une déviation des atomes d'Ag ; leur position sur l'écran donnera une information sur le moment magnétique propre de l'électron et ses directions possibles.

L'argent est porté à haute température dans un four. Les atomes en s'évaporant sont éjectés par un trou dans la paroi du four avec une énergie cinétique proportionnelle à la température, $\mathcal{E}_c = \frac{3}{2} k_B T$. Ce faisceau d'atomes passe par des fentes alignées avec l'orifice du four et l'écran, de sorte qu'il passe au milieu de l'entrefer de l'électroaimant. Pour cette expérience, il est important d'avoir un gradient de champ magnétique élevé. Pour cela, on utilise un électroaimant dont les pièces polaires, représentées sur la figure 1 par pôle + et pôle -, sont réalisées en matériau ferromagnétique et sont saturées par l'application d'un champ magnétique produit par des bobines (non représentées ici).

Selon le modèle planétaire circulaire, l'atome d'hydrogène est composé d'un électron de masse m_e gravitant autour d'un proton de masse m_p à une distance r_1 appelée premier rayon de Bohr . Ce système est équivalent à une boucle de courant (voir figure 2).

1. Qu'est-ce qui justifie l'hypothèse selon laquelle le noyau est immobile ?
2. Donner les expressions des 2 forces agissant sur l'électron. Montrer que l'une d'entre elles est négligeable.
3. Exprimer le courant en fonction de la charge, du rayon r et de la vitesse tangentielle de l'électron \vec{v} . En déduire l'expression du moment magnétique \vec{M} associé.

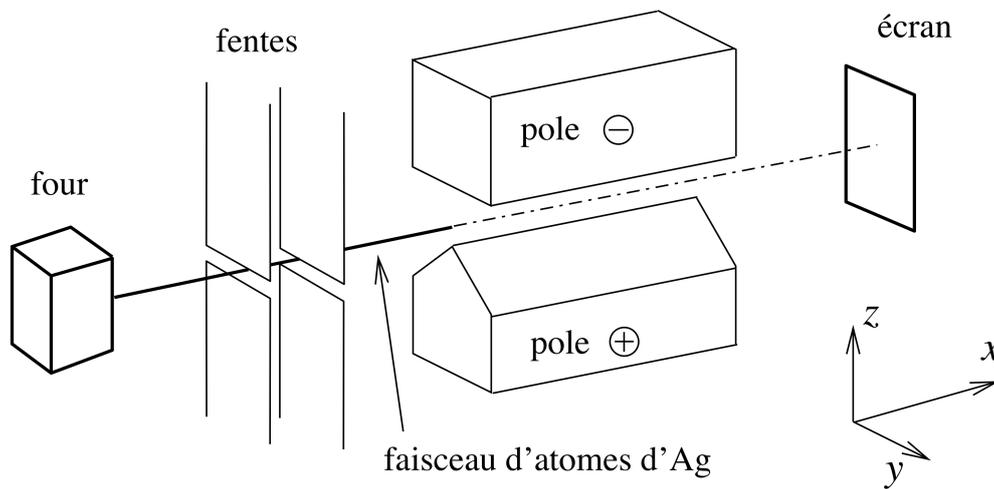


Fig. 1 – Configuration de l’expérience historique. Les pièces polaires ont une longueur 2ℓ suivant x et l’écran est placé à une distance D derrière les pôles de l’électro-aimant.

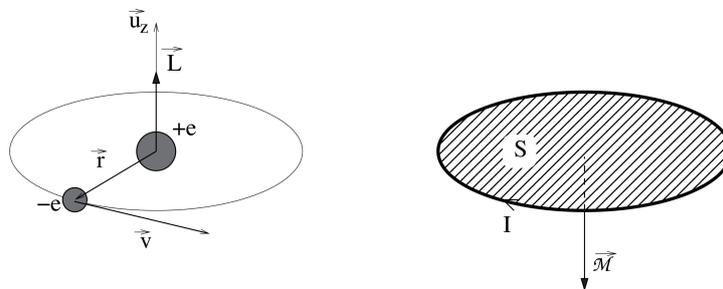


Fig. 2 – Atome d’hydrogène et boucle de courant ampérien équivalente.

4. Exprimer \vec{M} en fonction du moment cinétique orbital noté \vec{L} .
5. En mécanique quantique, on montre que le moment cinétique orbital d’un électron est un nombre entier de fois le quantum $\hbar = h/2\pi$, où h est la constante de Planck. En déduire l’expression du magnéton de Bohr, μ_B , la plus petite valeur permise du moment magnétique. Faire l’application numérique.

En réalité, les moments cinétique et magnétique orbitaux de l’électron s sont nuls en moyenne car son orbitale est sphérique. Cependant, l’électron possède un moment cinétique propre \vec{S} , qu’on appelle spin par analogie à la toupie, et qui est un demi entier de \hbar . Le moment magnétique propre de l’électron a toujours une valeur μ_B et c’est en fait celui-ci qui est mis en évidence dans l’expérience de Stern et Gerlach.

On étudie la trajectoire des atomes d’argent éjectés du four (voir figure 1) en considérant que tout le système est parfaitement aligné sur la cote $z = 0$, de sorte qu’en l’absence de champ tous les atomes vont être recueillis sur l’écran au point de coordonnées $(\ell + D, 0, 0)$ (l’origine des x est au milieu du pôle). Le faisceau passe au centre entre les pièces polaires de l’électro-aimant où le gradient de champ est considéré uniforme et où $\vec{B} = B\vec{u}_z$.

6. On applique le champ magnétique $B\vec{u}_z$ à l’électron, tel que θ représente l’angle constant entre \vec{B} et \vec{M} . Calculer la force qui s’applique sur le moment magnétique si le champ ne varie que selon z .
7. Appliquer le théorème du moment cinétique au moment dipolaire \vec{M} . En déduire l’équation différentielle sur \vec{M} et montrer que $\|\vec{M}\|$ et la projection de \vec{M} sur z , M_z , sont indépendantes du temps. En déduire que le mouvement de \vec{M} décrit un cône d’axe \vec{B} dont on calculera la pulsation de précession ω en fonction de e , m_e et B .
8. Expliquer avec des arguments qualitatifs pourquoi les composantes suivant x et y de \vec{M} sont nulles en moyenne.
9. On considère un atome qui entre dans l’entrefer tel que θ représente l’angle entre \vec{B} et \vec{M} . Calculer l’ordonnée du point d’impact sur l’écran en fonction de M , θ , $\partial B_z/\partial z$, T , ℓ , D et k_B .
10. Quelle serait la forme de la trace observée sur l’écran si les moments magnétiques étaient orientés avec

une direction aléatoire.

11. On observe deux tâches d'ordonnées $z_1 = -z_2 = 5.2$ mm. Que peut-on dire sur les directions des moments ? Calculer les valeurs possibles de \mathcal{M}_z pour $T = 1200$ K, $2\ell = 1$ m, $D = 1$ m, $\partial B_z/\partial z = 7$ T/m. Commenter ce résultat.

Données :

- ▷ Charge élémentaire $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C ;
- ▷ Constante universelle de gravitation $\mathcal{G} = 6.67 \times 10^{-11}$ m³ · kg⁻¹ · s⁻² ;
- ▷ Permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F · m⁻¹ ;
- ▷ Constante de Boltzmann $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J · K⁻¹ ;
- ▷ Masse des nucléons $m_{\text{proton}} \approx m_{\text{neutron}} = 1.67 \times 10^{-27}$ kg ;
- ▷ Masse de l'électron $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg ;
- ▷ Constante de Planck $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J · s.

Éléments de réponse :

27 - 2. $V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln(r) + V_0$.

28 - 1. $\mathcal{N} = a_0^{-3/2}/\sqrt{\pi}$; 2. Pour l'électron; $\rho(r) = -e|\Psi(r)|^2$ d'où $\vec{E} = \frac{e}{8\pi\varepsilon_0 r^2} e^{-2r/a_0} \left(2 + 2\frac{r}{a_0} + \frac{r^2}{a_0^2}\right) \vec{e}_r$.

29 - 1. $dI = \rho\omega r^2 \sin\theta dr d\theta$; 2. $d\vec{m} = \pi\rho\omega r^4 (\sin\theta)^3 dr d\theta \vec{e}_z$; 3. $-\frac{1}{5}e\omega R^2 \vec{e}_z$; 4. 3.7×10^{25} rad/s; 5. 1.0×10^{11} m/s.

30 - 2. $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{e}_z$;
4. $\vec{B}(N) = B_r(r, z) \vec{e}_r + B_z(r, z) \vec{e}_z$;

5. $B_r(N) = B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB(z)}{dz}$; 8. $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos\theta_2 - \cos\theta_1) \vec{e}_z$.

31 - 5. $\mu_B = \frac{he}{2m_e}$; 7. $\omega = \frac{Be}{2m_e}$; 9. $z_f = \frac{2\ell(\ell + D)}{k_B T} \mathcal{M} \frac{dB}{dz} \cos\theta$; 11. 8.2×10^{-24} A · m².